コーヒーブレーク Digital 9

$\sin 1^\circ$ の値を求めてみた。

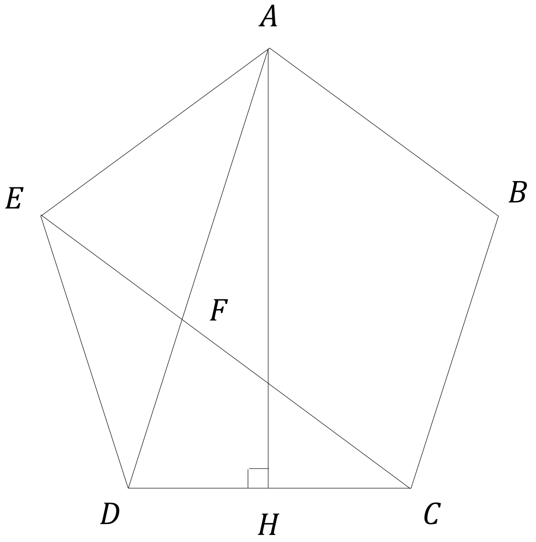
高校数学の頼れる味方、三角関数。

幾何の問題は勿論、積分でも散々お世話になる。

そして、誰しもが一度は知りたいと思った事があったであろう$\sin 1°$の値。

それさえ分かれば、加法定理であらゆる整数値における三角関数の値が分かるのに…

そんな長年の疑問を解決すべく、$\sin 1°$の値を求めてみた。



まずは$\sin 18°$、$\cos 18°$の値を求める。

1 辺の長さが 1 の正五角形を作図すると、右図のようになる。

正五角形の 1 つの内角の大きさは$108°$であるので、

$$\angle FDE = \angle CED = \angle DCE = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

3 つの角がそれぞれ等しいので、

$$\triangle DEF \backsim \triangle CED$$

また、

$$\angle CFD = \angle FDE + \angle FED = 72°$$

$$\angle CDF = 180° - (\angle DCE + \angle CFD) = 72°$$

であるので、$\triangle DCF$は二等辺三角形である。これより、$CF = 1$。

ここで、$CE = x$とおくと、

$$DE : EF = CE : ED$$

$$1 : (x-1) = x : 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)$$

$AD = CE$であるので、$AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

よって、$DH = \frac{1}{2}$、$\angle DAH = 18°$より、

$$\sin 18° = \frac{DH}{AD}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

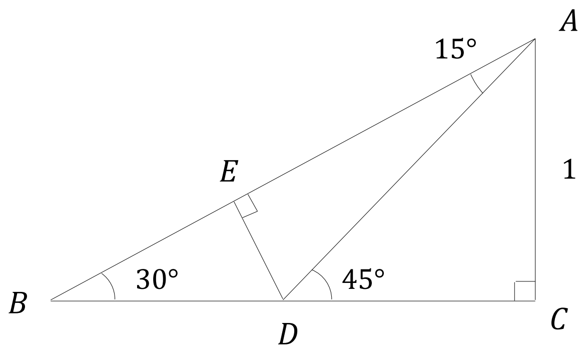
また、これより、

$$\cos 18° = \sqrt{1 - \sin^2 18°}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

次に$\sin 15°$、$\cos 15°$の値を求める。
半角の公式を使えば一瞬だが、ここでは少し趣を変えて図形的に求めてみる。
次のような図形を考える。



三角比より、

$$AB = 2$$

$$AD = \sqrt{2}$$

$$DC = 1$$

$$BC = \sqrt{3}$$

これより、 $BD = BC - DC = \sqrt{3} - 1$であるので、

$$DE = (\sqrt{3} - 1)\sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

よって、

$$\sin 15° = \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

また、

$$BE = (\sqrt{3} - 1)\cos 30°$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$AE = AB - BE = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

であるので、

$$\cos 15° = \frac{AE}{AD}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

以上の結果を用いて$\sin 3°$、$\cos 3°$の値を求める。

$$\begin{aligned}\sin 3° &= \sin(18° - 15°)\\ &= \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin 15°\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3° &= \cos(18° - 15°)\\ &= \cos 18° \cos 15° + \sin 18° \sin 15°\\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}\end{aligned}$$

既にとんでもなく鬱陶しい。

だが本番はここからだ。

いよいよ$\sin 1°$の値を求めにかかる。

3倍角の公式より、$\sin 3° = 3\sin 1° - 4\sin^3 1°$である。

この式に於いて、$\sin 1° = x$と置換すると、

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sin 3°}{4} = 0 \quad \cdots ①$$

という三次方程式が導かれ、この方程式の解の一つが$\sin 1°$になる。

ここで、$-\frac{3}{4} = -3yz$、$\frac{\sin 3°}{4} = y^3 + z^3$となるような$y$、$z$を導入すると、

$$① \to \quad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) = 0$$

と因数分解できるので、

（高校１年生で習うあの訳の分からない因数分解の公式は、この為のものだったのである。）

$$x+y+z=0 \text{ または } x^2 + (-y-z)x + (y^2+z^2-yz)$$

$$x = -y-z, \frac{y+z\pm\sqrt{3}i(y-z)}{2} \quad \cdots ②$$

と解を求められる。

y、zの条件より、

$$\begin{cases} -3yz = -\dfrac{3}{4} \\ y^3 + z^3 = \dfrac{\sin 3°}{4} \end{cases}$$

上の式より、$z = \frac{1}{4y}$。これを下の式に代入して、

$$y^3 + \frac{1}{64y^3} = \frac{\sin 3°}{4}$$

$$64y^6 - 16\sin 3°\, y^3 + 1 = 0$$

$y^3 = t$と置換すると、

$$64t^2 - 16\sin 3°\, t + 1 = 0$$

$$t = \frac{8\sin 3° \pm \sqrt{64\sin^2 3° - 64}}{64}$$

$$t = \frac{\sin 3° \pm \sqrt{-(1-\sin^2 3°)}}{8}$$

$$t = \frac{\sin 3° \pm i\cos 3°}{8}$$

$t = y^3$なので、

$$y = \frac{\sqrt[3]{\sin 3° \pm i\cos 3°}}{2}$$

y、zの条件式が対称式である事を考えると、

$$(y, z) = \left(\frac{\sqrt[3]{\sin 3° \pm i\cos 3°}}{2}, \frac{\sqrt[3]{\sin 3° \mp i\cos 3°}}{2}\right)$$

但し、複号同順。これを②に代入して、

$$x = \frac{\sqrt[3]{i\cos 3° - \sin 3°} - \sqrt[3]{i\cos 3° + \sin 3°}}{2}$$

または$x = \dfrac{\sqrt[3]{i\cos 3° + \sin 3°} - \sqrt[3]{i\cos 3° - \sin 3°} \pm \sqrt{3}\left(\sqrt[3]{\cos 3° - i\sin 3°} + \sqrt[3]{\cos 3° - i\sin 3°}\right)}{4}$

当然の事ながら、三次方程式なので解は３つある。

$\sin 3° = \sin 363° = \sin 723°$からも分かるように、解は$x = \sin 1°, \sin 121°, \sin 241°$となる。

果たして、上の３つの内どれが$\sin 1°$を表しているのか？

まずはそれを確かめておこう。上の式を変形して、

$$x = \frac{\sqrt[3]{i(\cos 3° + i\sin 3°)} - \sqrt[3]{i\{\cos(-3°) + i\sin(-3°)\}}}{2}$$

ここで、オイラーの公式$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$を使うと、

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{i(\cos 3° + i\sin 3°)} - \sqrt[3]{i\{\cos(-3°) + i\sin(-3°)\}}}{2} &= \frac{\left\{ie^{i(3°)}\right\}^{\frac{1}{3}} - \left\{ie^{i(-3°)}\right\}^{\frac{1}{3}}}{2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{i}e^{i(1°)} - \sqrt[3]{i}e^{i(-1°)}}{2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{i}}{2}\langle(\cos 1° + i\sin 1°) - \{\cos(-1°) + i\sin(-1°)\}\rangle \\
&= -\frac{i}{2}\{(\cos 1° + i\sin 1°) - (\cos 1° - i\sin 1°)\} \\
&= -\frac{i}{2}\cdot(2i\sin 1°) \\
&= \sin 1°
\end{aligned}$$

よって、これが$\sin 1°$を表している事が分かる。

では、これに$\sin 3°$、$\cos 3°$の値を代入する。

$\sin 1°$

$$= \frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}i-\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}}}{2}$$

$$- \frac{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}i+\frac{\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i-\sqrt{30}-\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}-2\sqrt{5+\sqrt{5}}}}{8}$$

$$- \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i+\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}}{8}$$

…お分かり頂けただろうか。
どうして実数の$\sin 1°$を表すのに虚数が出てくるのか、不思議に思うかも知れないが、
三次方程式を解く際には必ず虚数が出てくるものなのだ。
第１項と第２項の虚数が上手い事打ち消し合い、最終的には実数解が出てくるという段取りである。
え？じゃあ打ち消してくれって？
いや、現実としてそれが出来るかはまた別の問題でして…
という事で、これで勘弁して下さい。

ついでだから、$\cos 1°$の値も出しておこう。
３倍角の公式より、$\cos 3° = 4\cos^3 1° - 3\cos 1°$である。
この式に於いて、$\cos 1° = x$と置換すると、

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\cos 3°}{4} = 0$$

先程と同様の手順で解いて、

$$\cos 1° = \frac{\sqrt[3]{\cos 3° - i\sin 3°} + \sqrt[3]{\cos 3° + i\sin 3°}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i}}{8}$$

$$+ \frac{\sqrt[3]{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\left(\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i}}{8}$$

次のページに１行版があります。

$$\sin 1^\circ = \frac{\sqrt[3]{\left(\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i-\sqrt{30}-\sqrt{10}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}-2\sqrt{5+\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i+\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}}}{8}$$

$$\cos 1^\circ = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}-\left(\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i}+\sqrt[3]{\sqrt{30}-\sqrt{10}-\sqrt{6}+\sqrt{2}+2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}+\left(\sqrt{30}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{15+3\sqrt{5}}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)i}}{8}$$